SUCESSÕES E SÉRIES

Definição: Chama-se *sucessão de números reais* a qualquer f. r. v. r., cujo domínio é o conjunto dos números naturais IN, isto é,

$$u : \mathrm{IN} \to \mathrm{IR}$$
$$n \quad \to \quad u(n) = u_n$$

Definição:

i) $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ é crescente $\Leftrightarrow \ \forall n \in \mathrm{IN}, u_{n+1} \geq u_n$

ii) $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ é estritamente crescente $\Leftrightarrow \ \forall n \in \mathrm{IN}, u_{n+1} > u_n$

iii) $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ é decrescente $\Leftrightarrow \ \forall n \in \mathrm{IN}, u_{n+1} \leq u_n$

iv) $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ é estritamente decrescente $\Leftrightarrow \ \forall n \in \mathrm{IN}, u_{n+1} < u_n$

Definição: Chama-se *série numérica* ou *série de números reais* a uma expressão que se pode escrever na forma

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots$$

em que $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots$ são designados por *termos da série* e u_n *termo geral*.

Definição: Designa-se por *sucessão das somas parciais* ou *sucessão associada* à série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, a sucessão de termo geral

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Definição: Uma série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, diz-se convergente se e somente se $(S_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ é convergente.

Definição: Uma série numérica do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\, r^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots, \quad a, r \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$$

designa-se por *Série Geométrica*.

Teorema: Uma série geométrica converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

Definição: Uma série numérica do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots\ldots, \quad \alpha \in \left]0, +\infty\right[$$

designa-se por *Série de Dirichelet* (ou de *Riemann*).

Teorema: Uma série de Dirichelet converge se $\alpha > 1$ e diverge se $0 < \alpha \leq 1$.

Teorema:

i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são duas séries convergentes e $a \in \mathrm{IR}$, então:

a) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a\, u_n$ é convergente e tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} a\, u_n = a \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

b) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ é convergente e tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ é divergente.

Teorema: Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Teorema: Se $\lim_{n \to +\infty} u_n$ não existe ou $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

SÉRIES NUMÉRICAS DE TERMOS NÃO NEGATIVOS

Teorema: (1º Critério de Comparação)

Seja $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ e $u_n \leq v_n$, $\forall\, n \in \text{IN}$, então:

i) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

ii) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente.

Teorema: (2º Critério de Comparação)

Seja $u_n \geq 0$, $v_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = L$, $\forall\, n \in \text{IN}$, então:

i) Se $L \neq 0, +\infty$ então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são da mesma natureza.

ii) Se $L = 0$ então $\begin{cases} \text{Se } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ converge então } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge} \\ \text{Se } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ diverge então } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ diverge} \end{cases}$.

iii) Se $L = +\infty$ então $\begin{cases} \text{Se } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ diverge então } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ diverge} \\ \text{Se } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge então } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ converge} \end{cases}$.

Teorema: (Critério de Cauchy ou da Raiz)

Seja $u_n \geq 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, então:

i) Se $L < 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

ii) Se $L > 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

iii) Se $L = 1$ então nada se pode concluir, excepto se $\sqrt[n]{u_n} \to 1$ por valores superiores, e, neste caso, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Teorema: (Critério de D´Alembert ou da Razão)

Seja $u_n > 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$, $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, então:

i) Se $L < 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

ii) Se $L > 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

iii) Se $L = 1$ então nada se pode concluir, excepto se $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ por valores superiores, e, neste caso, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Teorema: (Critério de Raabe)

Seja $u_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = L$, $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, então:

i) Se $L < 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente;

ii) Se $L > 1$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;

iii) Se $L = 1$ então nada se pode concluir, excepto se $n\left[\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] \to 1$ por valores inferiores, e, neste caso, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Exemplo: Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(n\pi)}{n^2}$

b) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + 3n}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-1}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^3 + 5n}{n^5 + 2}$

f) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n^{3/2} + n^{1/2}}{n^2 - n}$

g) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{4n-1}{2n+1}\right)^n$

h) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{\ln(n)+1}\right)^{2n}$

i) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^n}{n}$

k) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{2.4.6.\cdots 2n}$

SÉRIES ABSOLUTAMENTE E SIMPLESMENTE CONVERGENTES

Definição: Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é ***absolutamente convergente*** se e só se a série dos valores absolutos (módulos) dos seus termos $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente.

Teorema: Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente então é convergente. Além disso

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Definição: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é ***simplesmente convergente*** se e só se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é divergente.

Definição: Uma ***série*** diz-se ***alternada*** se e só se é da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} u_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ com $u_n \geq 0$.

Teorema: Uma série alternada é absolutamente convergente se e só se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Teorema: (Critério de Leibniz)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ uma série de termos alternados, com $u_n \geq 0$, se:

i) $(u_n)_{n \in \mathrm{IN}}$ é decrescente

ii) $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$,

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ é convergente e diz-se simplesmente convergente. Caso contrário é divergente.

Exemplo: Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{3^n}$ **b)** $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$ **c)** $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

SUCESSÕES E SÉRIES DE FUNÇÕES

<u>Definição:</u> Chama-se *série de funções* a uma expressão que se pode escrever na forma $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, com $f_n(x)$, funções reais de variável real, todas definidas no mesmo intervalo $[a,b]$.

<u>Teorema:</u> (Critério de Weierstrass)

Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, definida no intervalo $[a,b]$. Se:

i) existem constantes M_n tais que $|f_n(x)| \leq M_n$

ii) a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ é convergente,

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é absolutamente convergente em $[a,b]$.

<u>Definição:</u> Uma *série de potências* é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n \quad \text{com } b, a_n \in \mathrm{IR},\ \forall n \in \mathrm{IN}.$$

Definição: Uma *série de potências de x* é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{com } a_n \in \mathrm{IR}, \ \forall n \in \mathrm{IN}.$$

Teorema: (Teorema de Abel)

i) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é convergente em $x_0 \neq 0$, então é absolutamente convergente $\forall x : |x| < |x_0|$;

ii) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é divergente em x_0, então é divergente $\forall x : |x| > |x_0|$.

Consideremos o seguinte conjunto de números reais

$$\mathrm{A} = \left\{ |x_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ é convergente para } x = x_0 \right\}$$

Definição: Chama-se *raio de convergência* da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e representa-se por *r* à quantidade

$$r = \begin{cases} \sup \mathrm{A}, & \\ +\infty & \text{se } \sup \mathrm{A} \text{ não existe} \end{cases}$$

Teorema: A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é absolutamente convergente se e só se

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1.$$

Teorema: A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é absolutamente convergente se e só se

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|}<1.$$

Exemplo: Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de funções:

a) $\sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} n^n x^n$

c) $\sum_{\mathrm{n}=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}(x-2)^n$

d) $\sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!}x^n$

e) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{b^n},\quad b>0$

DESENVOLVIMENTO DE FUNÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n$$

e seja $I(r)$ o seu intervalo de convergência.

<u>Definição:</u> Dada a função

$$f : \mathrm{I}(r) \to \mathrm{IR}$$

$$x \to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n$$

Para cada $x \in \mathrm{I}(r)$, $f(x)$ é a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n$ que se diz **desenvolvimento de *f(x)* segundo as potências de *(x − b)***.

Fórmula de Taylor e Mac-Laurin

Definição: Seja $f : \mathrm{D} \subset \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, n+1 vezes diferenciável no ponto $b \in \operatorname{int}(\mathrm{D})$ e $t \in \left]\mathrm{b}, x\right[$ (ou $\left]x, \mathrm{b}\right[$), então a **fórmula de Taylor** pode ser escrita como

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n + R_{n+1}(x)$$

em que $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$, se designa por **Resto de Lagrange de Ordem n+1**.

Definição: Seja $f : \mathrm{D} \subset \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, n+1 vezes diferenciável no ponto $b = 0$ e $t \in \left]\mathrm{b}, x\right[$ (ou $\left]x, \mathrm{b}\right[$), então a **fórmula de Mac-Laurin** pode escrever-se como

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Séries de Taylor e Mac-Laurin

Definição: Seja $f : \mathrm{D} \subset \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, infinitamente diferenciável numa vizinhança do ponto $b \in \operatorname{int}(\mathrm{D})$, tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_{n+1}(x) = 0$ com $R_{n+1}(x)$ o resto obtido a partir da fórmula de Taylor. Designa-se por **Série de Taylor de *f(x)* no ponto *b***, à série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

e tem –se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n .$$

Nota: Para b=0 tem-se a Série de Mac-Laurin.

Teorema: Seja

$$\begin{aligned} f : \mathrm{I}(r) &\to \mathrm{IR} \\ x &\to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-b)^n \end{aligned}$$

então

i) $f(x)$ é contínua em $\mathrm{I}(r)$;

ii) $f(x)$ é finitamente diferenciável no interior de $\mathrm{I}(r)$ e $\forall x \in \left]b-r, b+r\right[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{d}{dx}\left(a_n (x-b)^n\right)\right];$$

iii) $f(x)$ é primitivável no interior de $\mathrm{I}(r)$ e $\forall x \in \left]b-r, b+r\right[$

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int a_n (x-b)^n\,dx\right].$$

<u>Exemplo:</u> Obtenha o desenvolvimento em série de potências de *x*, e respectivo intervalo de convergência, das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ **c)** $f(x) = \cos(x)$