Aplicações das derivadas ao estudo do gráfico de funções

MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS:

Definição:

Seja f uma f. r. v. r. definida num intervalo e $x_0 \in D_f$.

1) f tem um **mínimo local** $f(x_0)$, em x_0, se e só se $f(x) \geq f(x_0)$ para qualquer $x \in$ I;
2) f tem um **máximo local** $f(x_0)$, em x_0, se e só se $f(x) \leq f(x_0)$ para qualquer $x \in$ I

onde I $\subseteq D_f$ é um intervalo que contém x_0. Se f tem um máximo ou um mínimo local em $x_0 \in D_f$, então diz-se que f tem um **extremo local** em x_0. O número $x_0 \in D_f$ onde f atinge o máximo (mínimo) local diz-se **maximizante** (**minimizante**) **local**.

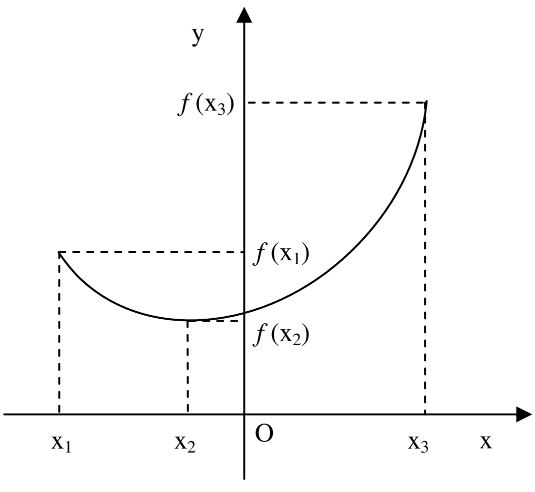


Figura 1

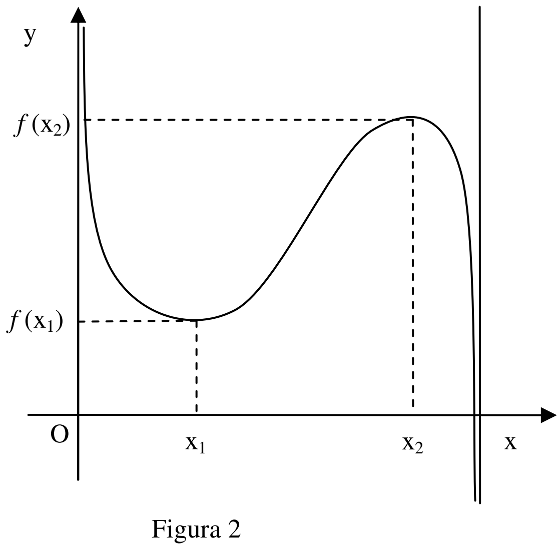


Figura 2

Na figura 1, f tem um mínimo local $f(x_2)$ em x_2 e dois máximos locais $f(x_1)$ e $f(x_3)$ com maximizantes locais x_1 e x_3. Na figura 2, f tem um mínimo local $f(x_1)$ com minimizante x_1 e um máximo local $f(x_2)$ com maximizante x_2.

A figura 2 mostra que uma função pode ter máximos (mínimos) locais e não ter máximo (mínimo) absoluto. Contudo se o máximo (mínimo) absoluto de uma função existe , então é o máximo (mínimo) local de maior (menor) valor. Portanto se f tem máximo (mínimo), então um processo para o determinar consiste em obter todos os máximos (mínimos) locais e escolher aquele de maior (menor) valor.

NOTA : Aos máximos e mínimos de uma dada função f é usual chamar-se **valores extremos** ou **extremos** de f .

O estudo dos extremos locais de uma função pode ser feito a partir da monotonia da função. O próximo teorema é importante para esse estudo.

Teorema:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável num intervalo $]a,b[$.

1. Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \,]a,b[$, então f é crescente em $]a,b[$;

2. Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in \,]a,b[$, então f é decrescente em $]a,b[$;

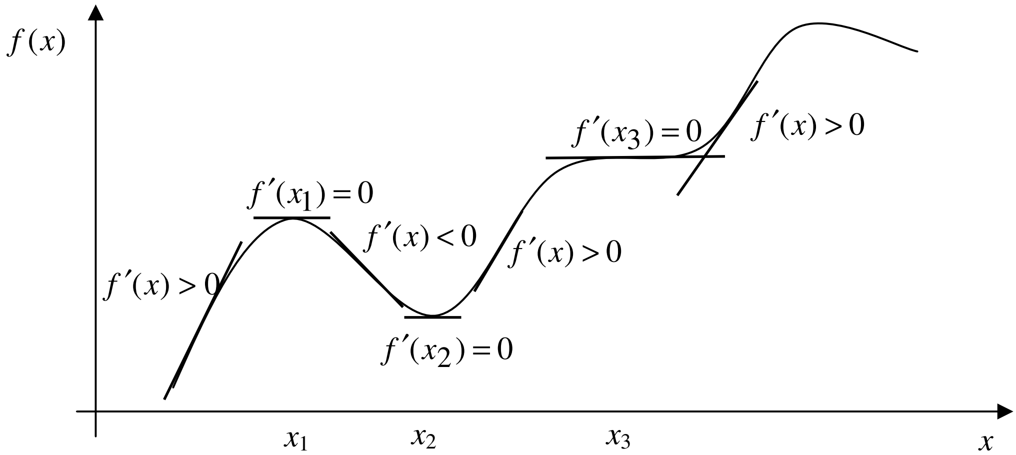
3. Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in \,]a,b[$, então f é constante em $]a,b[$.

NOTA : Se f é uma função contínua e derivável no interior de um determinado intervalo, então a função só pode passar de decrescente a crescente ou vice-versa se, num certo ponto desse intervalo, o declive da recta tangente é zero. Nesses pontos a função tem um valor mínimo ou máximo, respectivamente.

Definição:

Um ponto de abcissa x_0, $x_0 \in D_f$, diz-se **ponto crítico** (**ponto estacionário**) de f se $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

<u>NOTA</u> : Uma função f não tem necessariamente um valor máximo (mínimo) $f(x_0)$ num ponto crítico x_0. Os pontos críticos são possíveis maximizantes(minimizantes) locais, ou seja, aos pontos críticos correspondem possíveis extremos locais de f.



Vamos agora apresentar condições suficientes pelas quais é possível concluir que um ponto x_0 é maximizante ou minimizante local a partir da derivada da função nesse ponto. Iremos distinguir os casos dos pontos interiores e pontos fronteiros.

<u>Teorema (pontos interiores):</u>

Se f é uma função contínua no intervalo I e derivável lateralmente num ponto interior $x_0 \in \mathrm{I}$, então

- Se $f'(x_0^-) < 0$ e $f'(x_0^+) > 0$ então f tem um **mínimo local** em x_0;
- Se $f'(x_0^-) > 0$ e $f'(x_0^+) < 0$ então f tem um **máximo local** em x_0.

<u>Teorema (pontos fronteiros):</u>

Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável lateralmente em a e b, então

- $f'(a^+) < 0 \Rightarrow f$ tem um **máximo local em *a***;
- $f'(a^+) > 0 \Rightarrow f$ tem um **mínimo local em *a***;
- $f'(b^-) > 0 \Rightarrow f$ tem um **máximo local em *b***;
- $f'(b^-) < 0 \Rightarrow f$ tem um **mínimo local em *b***.

Exemplo:

Determine, se existirem, os máximos e os mínimos das funções:

a) $f(x) = |x|$; **b)** $f(x) = x^4 - 2x^2$;

c) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; **d)** $f(x) = \operatorname{sen}(x) + x$.

Teorema:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ que admite derivada de segunda ordem no intervalo $]a,b[$.

1. Se $f''(x) > 0 \ \forall x \in \,]a,b[$, então f tem a concavidade voltada para cima em $]a,b[$;

2. Se $f''(x) < 0 \ \forall x \in \,]a,b[$, então f tem a concavidade voltada para baixo em $]a,b[$.

Definição:

Um ponto $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in D_f$, diz-se **ponto de inflexão** se o gráfico de f muda o sentido da concavidade nesse ponto.

Definição:

Um ponto de abcissa x_0, $x_0 \in D_f$, diz-se **ponto crítico de segunda espécie** (**ponto estacionário de segunda espécie**) de $f(x)$ se $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)$ não existe.

NOTA: Os pontos críticos de segunda espécie são pontos onde a função poderá ou não mudar o sentido da concavidade.

Exemplo:

Dada a função $f(x) = 1 - x^{1/3}$ determine:

a) intervalos de monotonia ;
b) pontos de intersecção com os eixos ;
c) pontos de inflexão.

Faça um esboço gráfico da função.

Definição:

Uma recta chama-se assímptota de uma curva se a distância de um ponto qualquer da curva a essa recta se aproxima cada vez mais de zero à medida que o ponto percorre a curva.

- **Assímptotas Verticais**

Diz-se que a recta de equação ***x=a*** é uma assímptota vertical da curva de f se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

- **Assímptotas Oblíquas**

Diz-se que a recta de equação ***y=mx+b*** é uma assímptota oblíqua da curva de f se existem e são finitos os limites:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{e} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

NOTA: Se ***m*= 0** tem-se ***y=b*** que é a equação de uma **assímptota horizontal.**

Esquema geral para o esboço de um gráfico de uma função

1. Domínio;

2. Periodicidade e simetrias da função;

3. Pontos de descontinuidade da função;

4. Pontos de intersecção com os eixos;

5. Intervalos de monotonia e extremos da função;

6. Intervalos de concavidade e convexidade e pontos de inflexão da função;

7. Assímptotas.

Exemplo

Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \left| x^2 - x \right|$; **b)** $f(x) = \sqrt{(2x+1)^3}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$; **d)** $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$.