INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR
Escola Superior de Tecnologia de Tomar
Área Interdepartamental de Matemática
Análise Matemática I (Engenharias)

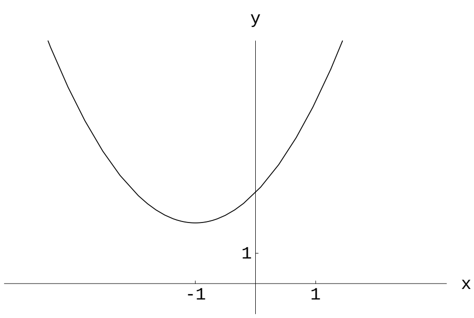
1. **Funções Polinomiais**

Se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são números reais, uma **função polinomial** tem a forma

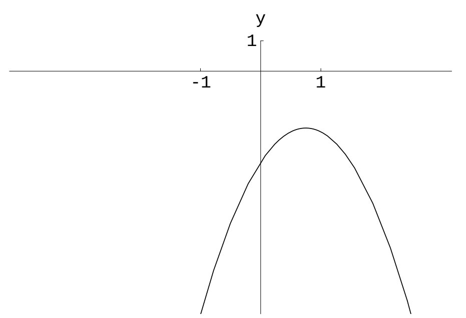
$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \end{array}$$

onde A é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$. Como casos particulares temos: a **função constante** ($f(x) = a_n$), a **função linear** ($f(x) = a_{n-1}x$), a **função afim** ($f(x) = a_{n-1}x + a_n$) e a **função quadrática** ($f(x) = a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$).

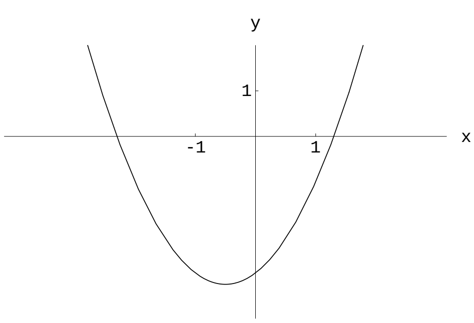
Alguns Gráficos



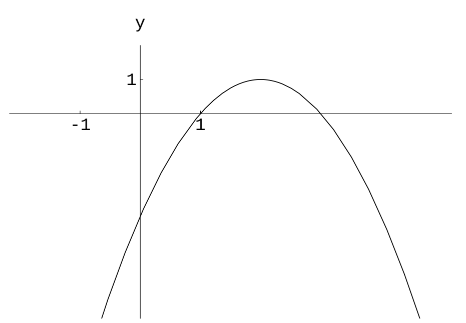
$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a > 0, \; b^2 - 4ac < 0$



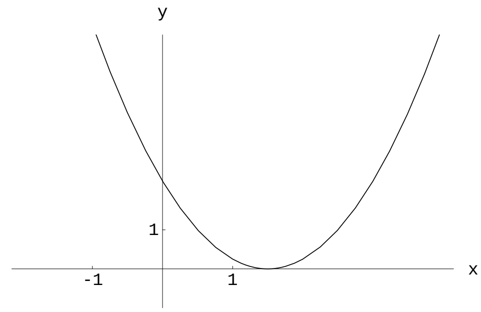
$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a < 0, \; b^2 - 4ac < 0$

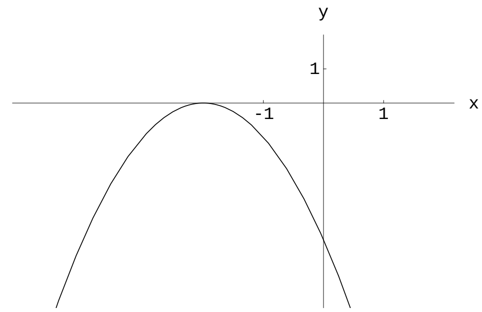


$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a > 0, \; b^2 - 4ac > 0$



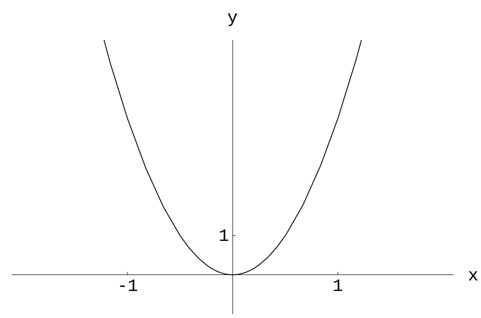
$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a < 0, \; b^2 - 4ac > 0$

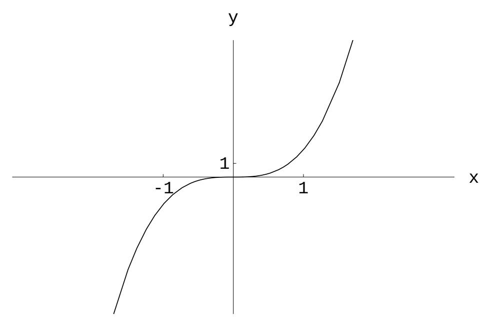




$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a > 0, \; b^2 - 4ac = 0$

$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a < 0, \; b^2 - 4ac = 0$





$f(x) = ax^{2p}, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a > 0, \; p$ inteiro positivo

$f(x) = ax^{2p+1}, \;\; x \in \mathbb{R}$
$a > 0, \; p$ inteiro positivo

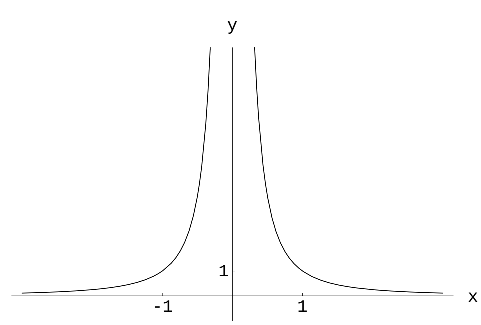
2. **Funcões Racionais**

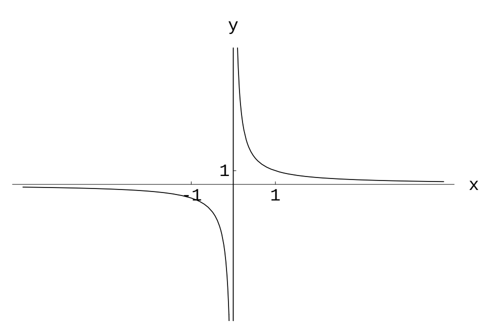
Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ funções polinomiais. As **funções racionais** são funções da forma

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \frac{P(x)}{Q(x)} \end{array}$$

onde A é um subconjunto qualquer de $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Alguns Gráficos





$f(x) = \frac{1}{x^{2p}}, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
p inteiro positivo

$f(x) = \frac{1}{x^{2p+1}}, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
p inteiro não negativo

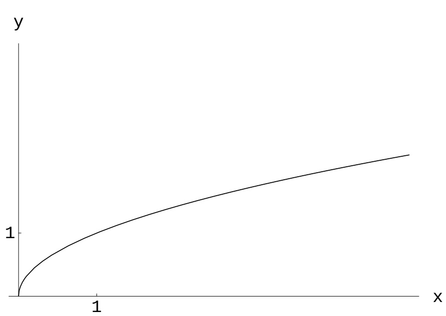
3. **Funções Irracionais**

Sejam $P(x)$ uma função polinomial e p, q inteiros positivos. As **funções irracionais** são funções da forma

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = (\sqrt[q]{P(x)})^p \end{array}$$

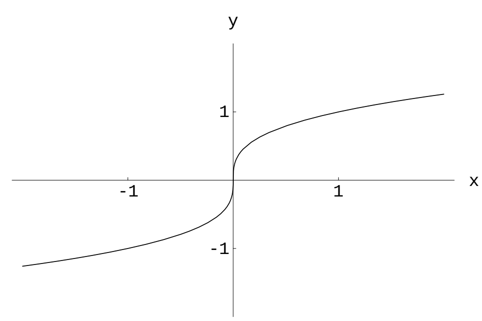
onde A é um subconjunto qualquer de $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se q é par, e A é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$ se q é ímpar.

Alguns Gráficos



$f(x) = \sqrt[2p]{x}, \;\; x \in [0, +\infty[$

p inteiro positivo



$f(x) = \sqrt[2p+1]{x}, \;\; x \in \mathbb{R}$

p inteiro positivo

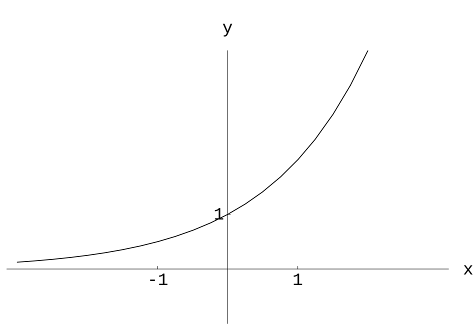
4. **Função Exponencial**

Seja a um número real positivo ($a \neq 1$). A **função exponencial de base a** é

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = a^x \end{array}$$

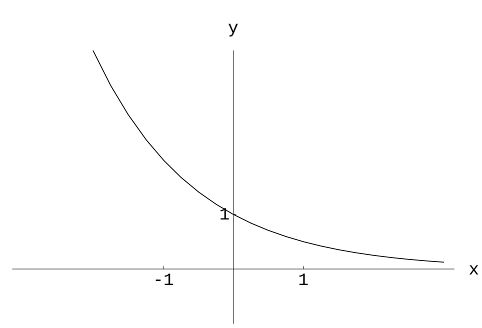
Se $a = e$, a função f diz-se **função exponencial natural**.

Alguns Gráficos



$f(x) = a^x, \;\; x \in \mathbb{R}$

$a > 1$



$f(x) = a^x, \;\; x \in \mathbb{R}$

$0 < a < 1$

5. **Função Logarítmica**

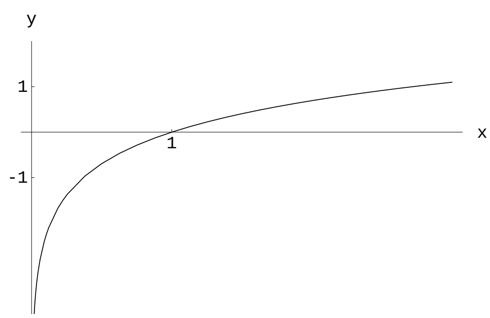
Seja a um número real positivo ($a \neq 1$). A **função logarítmica de base a** é

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \log_a x \end{array}$$

Se $a = e$, a função f diz-se **função logaritmo natural**. Escreve-se $\ln x$ ou $\log x$, em vez de $\log_e x$.

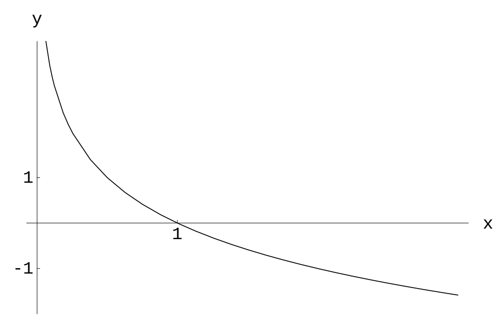
Por definição, $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$.

Alguns Gráficos



$f(x) = \log_a(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$

$a > 1$

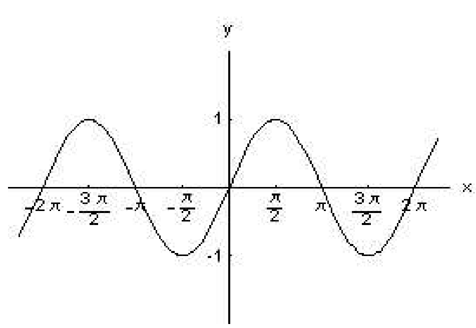


$f(x) = \log_a(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$

$0 < a < 1$

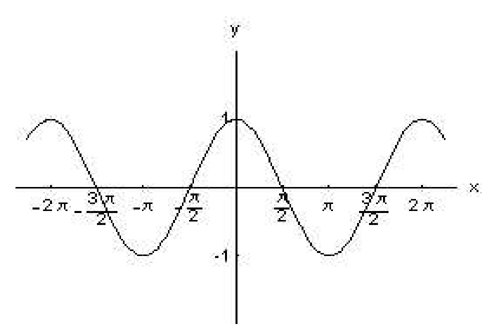
6. **Funções Trigonométricas Directas**

Alguns Gráficos



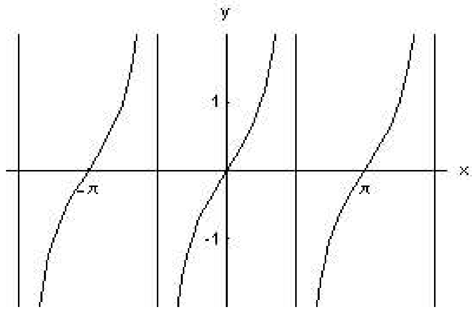
$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

função ímpar, periódica de período 2π

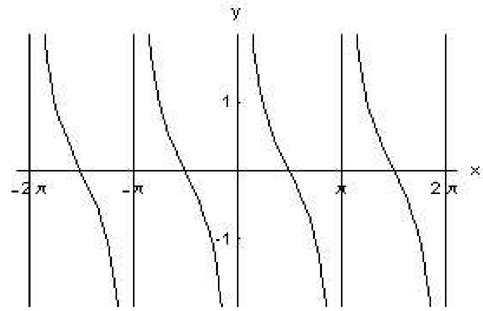


$f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$

função par, periódica de período 2π



$f(x) = \tan x, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
função ímpar, periódica de período π



$f(x) = \cot x, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
função ímpar, periódica de período π

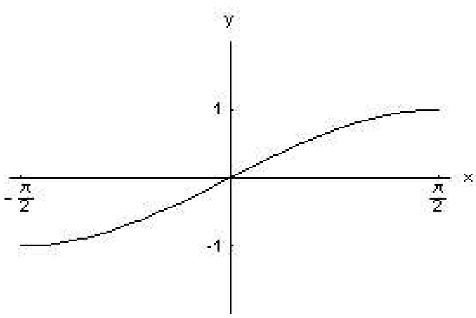
7. **Funções Trigonométricas Inversas**

Chama-se **função arco seno** e define-se

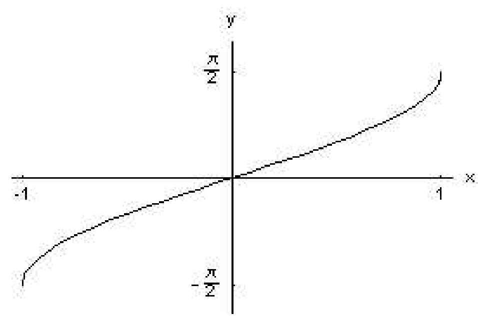
$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longrightarrow & y = \arcsin x \end{array}$$

à função inversa da função

$$\begin{array}{rcl} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longrightarrow & y = \sin x \end{array}$$



$f(x) = \sin x, \;\; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$f(x) = \arcsin x, \;\; x \in [-1,1]$

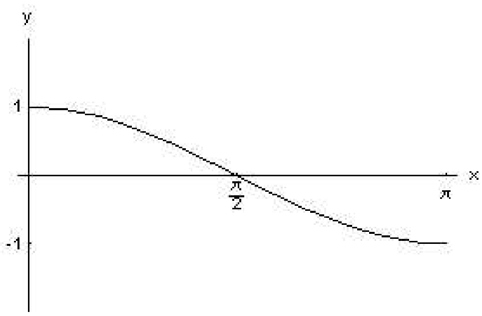
Sejam $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $y \in [-1,1]$. Então $\sin x = y \;\Leftrightarrow\; x = \arcsin y$.

Chama-se **função arco co-seno** e define-se

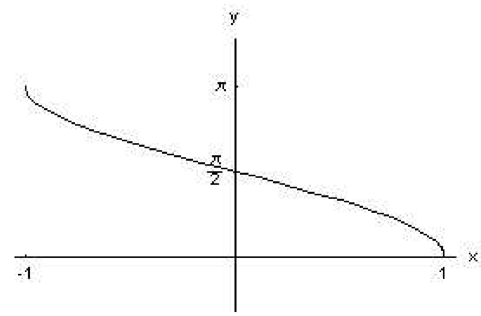
$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longrightarrow & y = \arccos x \end{array}$$

à função inversa da função

$$\begin{array}{rcl} f : [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longrightarrow & y = \cos x \end{array}$$



$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$



$f(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$

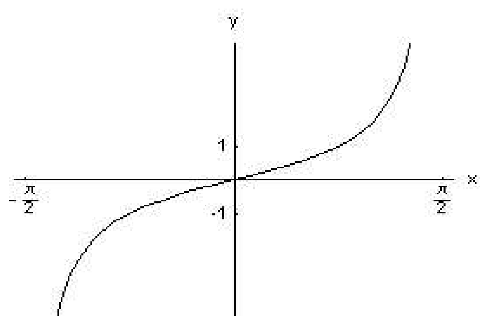
Sejam $x \in [0, \pi]$ e $y \in [-1, 1]$. Então $\cos x = y \;\Leftrightarrow\; x = \arccos y$.

Chama-se **função arco tangente** e define-se

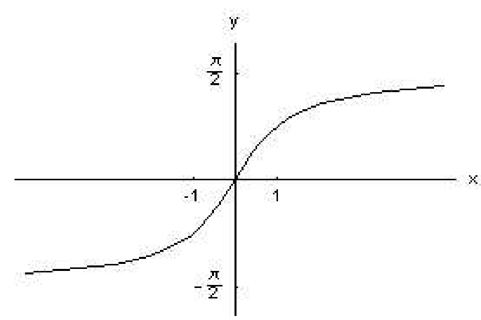
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longrightarrow & y = \arctan x \end{array}$$

à função inversa da função

$$\begin{array}{rcl} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \tan x \end{array}$$



$f(x) = \tan x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



$f(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$

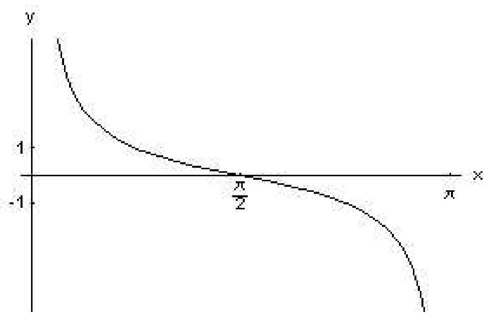
Sejam $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $y \in \mathbb{R}$. Então $\tan x = y \;\Leftrightarrow\; x = \arctan y$.

Chama-se **função arco co-tangente** e define-se

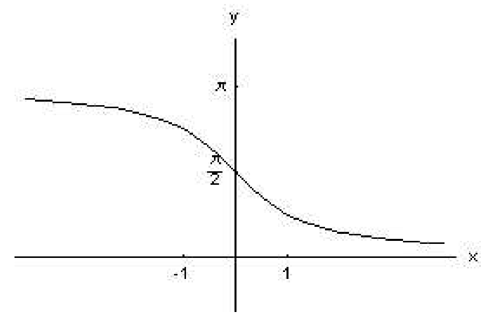
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, \pi[\\ x & \longrightarrow & y = \text{arccot}\, x \end{array}$$

à função inversa da função

$$\begin{array}{rcl} f :]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \cot x \end{array}$$



$f(x) = \cot x, \;\; x \in]0, \pi[$

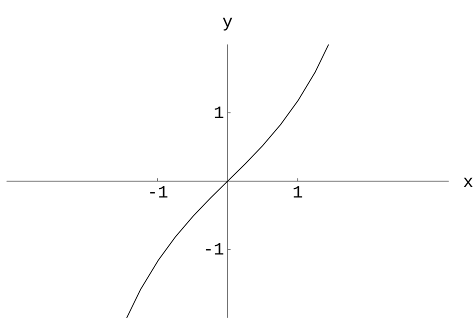


$f(x) = \operatorname{arccot} x, \;\; x \in \mathbb{R}$

Sejam $x \in]0, \pi[$ e $y \in \mathbb{R}$. Então $\cot x = y \;\Leftrightarrow\; x = \operatorname{arccot} y$.

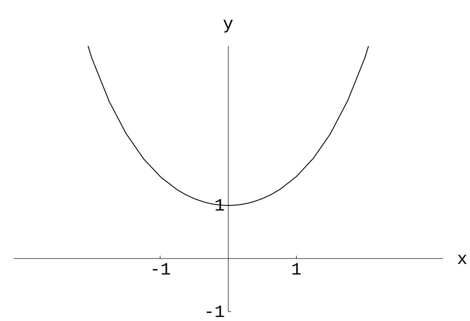
8. **Funções Hiperbólicas**

Alguns Gráficos



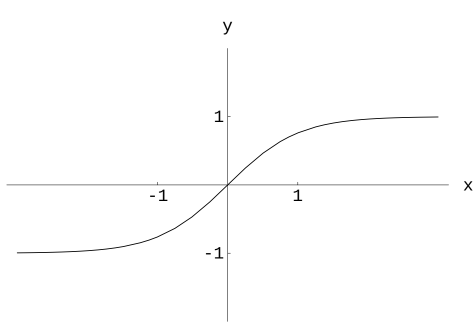
$f(x) = \sinh x, \;\; x \in \mathbb{R}$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



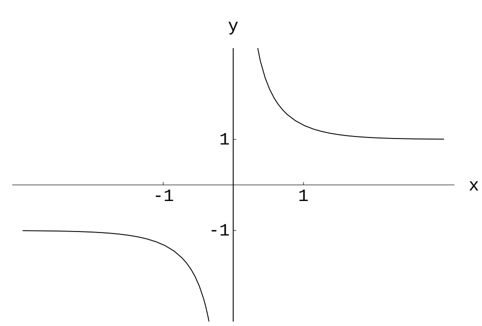
$f(x) = \cosh x, \;\; x \in \mathbb{R}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



$f(x) = \tanh x, \;\; x \in \mathbb{R}$

$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



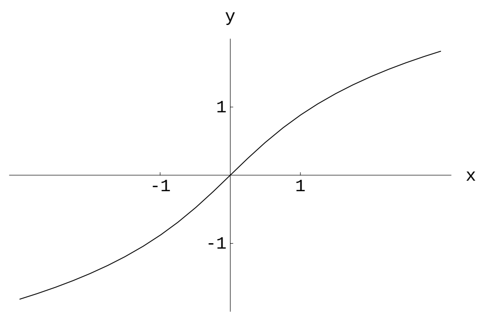
$f(x) = \coth x, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

9. **Funções Hiperbólicas Inversas**

Chama-se **função argumento seno hiperbólico** à função inversa da função seno hiperbólico e define-se

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \arg\sinh x \end{array}$$



$f(x) = \arg\sinh x, \quad x \in \mathbb{R}$

Sejam $x,\ y \in \mathbb{R}$. Então

$$\sinh x = y \ \Leftrightarrow\ x = \arg\sinh y$$

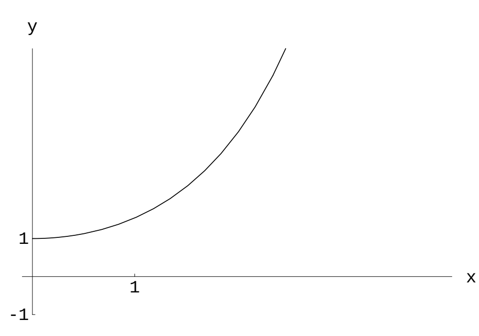
$$\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Chama-se **função argumento co-seno hiperbólico** e define-se

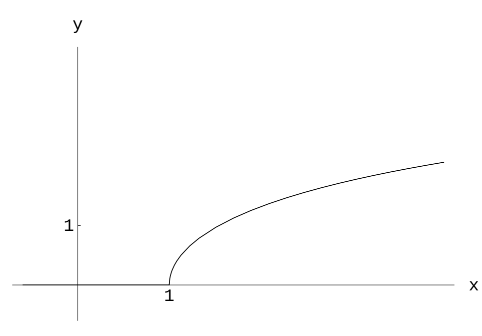
$$\begin{array}{rcl} f:[1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longrightarrow & y = \arg\cosh x \end{array}$$

à função inversa da função

$$\begin{array}{rcl} f:[0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longrightarrow & y = \cosh x \end{array}$$



$f(x) = \cosh x, \quad x \in [0,+\infty[$



$f(x) = \arg\cosh x, \quad x \in [1,+\infty[$

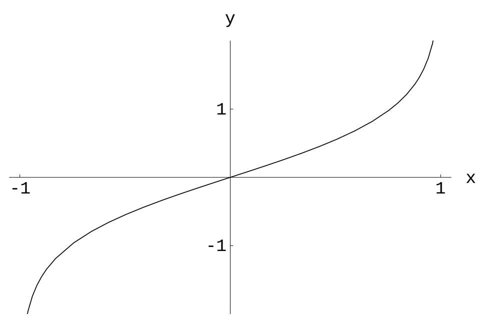
Sejam $x \in [0, +\infty[$ e $y \in [1, +\infty[$. Então

$$\cosh x = y \;\Leftrightarrow\; x = \arg\cosh y$$

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Chama-se **função argumento tangente hiperbólica** à função inversa da função tangente hiperbólica e define-se

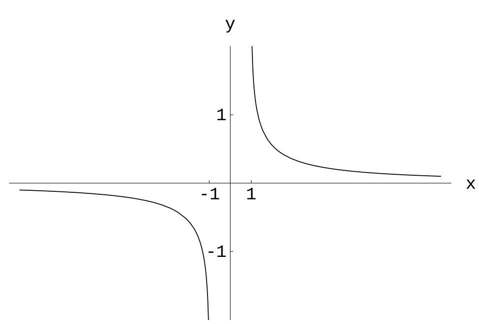
$$\begin{array}{rcl} f :]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \arg\tanh x \end{array}$$



$$f(x) = \arg\tanh x, \;\; x \in]-1, 1[$$

Chama-se **função argumento co-tangente hiperbólica** à função inversa da função co--tangente hiperbólica e define-se

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ x & \longrightarrow & y = \arg\coth x \end{array}$$



$$f(x) = \arg\coth x, \;\; x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$