Números Reais

Potências e Logaritmos

Se $n \in \mathbb{N}$ então a^n é definida por:

$$a^n = \underbrace{a.a \ldots a}_{n \, \text{factores}}$$

É evidente que $a^n = 0$ se e só se $a = 0$. Para $a \neq 0$, o sinal de a^n depende da base a e do expoente ser par ou ímpar. Assim se n é ímpar, a^n tem o sinal de a. Se n é par, $a^n > 0$ para qualquer $a \neq 0$.

Consideremos agora a equação

$$x^n = a.$$

Esta equação tem sempre solução se n é ímpar. Contudo, se n é par então a equação apenas tem solução quando $a \geq 0$. A solução dessa equação chama-se **raiz de índice n** de a e representa-se por

$$\sqrt[n]{a}.$$

Se n é ímpar, então existe uma e uma só raiz para qualquer número real a. Se n é par, então $\sqrt[n]{a} > 0$ e a equação também tem outra solução, $-\sqrt[n]{a}$, que é denominada *raiz negativa de índice n* de a.

A potência de expoente inteiro e negativo a^{-n} é definida, para $a \neq 0$, por:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Se $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ então a potência de expoente racional $a^{\frac{p}{q}}$ é definida por:

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Podemos falar de potência de expoente real, a^x, pelo menos para $a > 0$.

As principais propriedades das potências de expoentes reais são apresentadas seguidamente.

$$\begin{array}{l} a^0 = 1 \\ a^1 = a \end{array} \tag{1}$$

$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Existe} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \\ a^x > x \quad \text{para} \quad x > \beta \tag{2}$$

$$a^x a^y = a^{x+y},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x b^x = (ab)^x, \tag{3}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

$$0 < a < 1 \wedge x < y \quad \Rightarrow \quad a^x > a^y \\ a > 1 \wedge x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y \tag{4}$$

Se a e b são números reais positivos e $a \neq 1$, então a equação

$$a^x = b$$

tem uma e uma só solução, que se diz **logaritmo de b na base a** e se representa por

$$\log_a b.$$

Donde

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b, \tag{5}$$

para quaisquer a, b positivos e $a \neq 1$.

É de realçar que só existem logaritmos de números positivos, mas o logaritmo de um número positivo pode ser negativo ou nulo. Por exemplo, como $2^{-2} = \frac{1}{4}$, então

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2.$$

A partir das propriedades das exponenciais apresentadas anteriormente e da última equivalência, podemos estabelecer alguns resultados importantes para os logaritmos. Assim, substituindo no lado esquerdo da equivalência o valor de x dado no lado direito, obtém-se a seguinte igualdade:

$$\forall b \in]0, +\infty[\qquad a^{\log_a b} = b. \tag{6}$$

Usando a definição de logaritmo, obtém-se de 1 as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{c} \log_a 1 = 0 \\ \log_a a = 1. \end{array} \tag{7}$$

Além disso,

$$\begin{array}{c} a > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Existe} \quad \beta \geq 0 \quad \text{tal que} \\ \log_a x < x \quad \text{para} \quad x > \beta \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l} 0 < a < 1 \ \wedge \ 0 < x < y \ \Rightarrow \ \log_a x > \log_a y \\ a > 1 \ \wedge \ 0 < x < y \quad \Rightarrow \quad \log_a x < \log_a y \end{array} \tag{9}$$

Verificam-se ainda as seguintes propriedades

$$
\begin{aligned}
xy > 0 \;\Rightarrow\; \log_a(xy) &= \log_a|x| + \log_a|y| \\
\frac{x}{y} > 0 \quad \Rightarrow \quad \log_a \frac{x}{y} &= \log_a|x| - \log_a|y| \\
x > 0 \quad \Rightarrow \quad \log_a x^y &= y \log_a x
\end{aligned}
\tag{10}
$$

O logaritmo na base e chama-se **logaritmo natural** e, neste caso, escreve-se $\ln x$ ou $\log x$ para representar o logaritmo de x nessa base.