Números Reais

Trigonometria Hiperbólica

Definimos **Co-Seno Hiperbólico de** x ($\cosh x$), **Seno Hiperbólico de** x ($\sinh x$), **Tangente Hiperbólica de** x ($\tanh x$) e **Cotangente Hiperbólica de** x ($\coth x$), a partir das seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
&\cosh x = \tfrac{e^x+e^{-x}}{2} \;; \\
&\sinh x = \tfrac{e^x-e^{-x}}{2}; \\
&\tanh x = \tfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}; \\
&\coth x = \tfrac{\cosh x}{\sinh x} = \tfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \tfrac{1}{\tanh x}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Note-se que $\cosh x$, $\sinh x$ e $\tanh x$ são definidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$ mas $\coth x$ não é definido para $x = 0$.

Para obter

$$\boxed{\cosh 0 = 1\,,\ \sinh 0 = 0\,,\ \tanh 0 = 0}$$

basta substituir x por 0 nas fórmulas anteriores.

Temos as seguintes consequências da definição:

(i) $\cosh x > 0$, pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $|\sinh x| < \cosh x$, pois a soma de dois números positivos é sempre superior à sua diferença;

(iii) $|\tanh x| = \dfrac{|\sinh x|}{\cosh x} < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Temos ainda as seguintes propriedades.

$$\boxed{\begin{array}{l} x \neq 0 \;\Rightarrow\; \cosh x > 1 \\ x < 0 \;\Rightarrow\; \sinh x < 0 \;\wedge\; \tanh x \in]-1, 0[\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\; \coth x \in]-\infty, -1[\\ x > 0 \;\Rightarrow\; \sinh x > 0 \;\wedge\; \tanh x \in]0, 1[\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\; \coth x \in]1, +\infty[\end{array}}$$

Para obter

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh(-x) = \cosh x\,,\ \sinh(-x) = -\sinh x\,, \\ \tanh(-x) = -\tanh x\,,\ \coth(-x) = -\coth x \end{array}}$$

basta substituir x por $-x$ nas fórmulas (1).

Iremos agora estabelecer as principais fórmulas da trigonometria hiperbólica.

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh x + \sinh x = e^{x} \\ \cosh x - \sinh x = e^{-x} \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \\ \coth^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x} \end{array}} \tag{2}$$

$$\boxed{\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}\ ,\ \sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}} \tag{3}$$

Como $\tanh x \in]-1,1[$ então $1-\tanh^2 x > 0$. Por outro lado, como $\cosh x > 0$ vem:

$\sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$.

Logo da quarta fórmula de (2) vem

$\sqrt{1-\tanh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh x} \Rightarrow \cosh x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$

Como $\sinh x = \tanh x \cosh x$ então

$$\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}.$$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \\
\coth(x+y) = \frac{1 + \coth x \coth y}{\coth x + \coth y}
\end{array}} \tag{4}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \\
\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \\
\coth 2x = \frac{1 + \coth^2 x}{2 \coth x}
\end{array}} \tag{5}
$$

Estas fórmulas obtêm-se das anteriores fazendo $x = y$

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x \cosh y &= \tfrac{1}{2}(\cosh(x+y) + \cosh(x-y))\\ \sinh x \sinh y &= \tfrac{1}{2}(\cosh(x+y) - \cosh(x-y))\\ \sinh x \cosh y &= \tfrac{1}{2}(\sinh(x+y) + \sinh(x-y))\end{aligned}} \tag{6}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh a + \cosh b &= 2\cosh\tfrac{a+b}{2}\cosh\tfrac{a-b}{2}\\ \cosh a - \cosh b &= 2\sinh\tfrac{a+b}{2}\sinh\tfrac{a-b}{2}\\ \sinh a + \sinh b &= 2\sinh\tfrac{a+b}{2}\cosh\tfrac{a-b}{2}\\ \sinh a - \sinh b &= 2\cosh\tfrac{a+b}{2}\sinh\tfrac{a-b}{2}\end{aligned}} \tag{7}$$

Estas igualdades obtêm-se das fórmulas anteriores e de

$$\cosh x \sinh y = \frac{1}{2}(\sinh(x+y) - \sinh(x-y))$$

fazendo

$$\left\{\begin{array}{l} a = x+y \\ b = x-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{a+b}{2} \\ x = \frac{a-b}{2} \end{array}\right.$$

Finalmente iremos estabelecer as chamadas

Fórmulas de Moivre

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall m \in \mathbb{R} (\cosh x + \sinh x)^m = \cosh mx + \sinh mx \\ \forall m \in \mathbb{R} (\cosh x - \sinh x)^m = \cosh mx - \sinh mx\end{array}} \tag{8}$$

Para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$ tem-se por (2)

$$\begin{aligned}(\cosh x + \sinh x)^m &= (e^x)^m = e^{xm} \\ &= \cosh mx + \sinh mx\end{aligned}$$

e do mesmo modo se demonstrava a segunda propriedade.