Gráficos de Funções Elementares

O gráfico de uma f.r.v.r. é uma curva ou uma união de curvas. Para a sua determinação é necessário conhecer o comportamento da função. Entre os vários aspectos da teoria das funções há a destacar:

1. Domínio;
2. Periodicidade e simetrias;
3. Pontos de descontinuidade;
4. Pontos de intersecção com os eixos;
5. Intervalos de monotonia e extremos;
6. Intervalos de concavidade e pontos de inflexão;
7. Assímptotas.

Alguns dos pontos acabados de referir irão ser estudados mais à frente. Para além dos aspectos referidos, é possível obter gráficos de funções reais de variável real, recorrendo aos gráficos, já conhecidos, de outras funções. Podemos assim usar os seguintes resultados.

Seja f uma função e c uma constante positiva.

Translação Vertical

O gráfico de $g(x) = f(x) + c$ é o gráfico de f deslocado verticalmente, no sentido positivo, c unidades.

O gráfico de $g(x) = f(x) - c$ é o gráfico de f deslocado verticalmente, no sentido negativo, c unidades.

Translação Horizontal

O gráfico de $g(x) = f(x + c)$ é o gráfico de f deslocado horizontalmente, no sentido negativo, c unidades.

O gráfico de $g(x) = f(x - c)$ é o gráfico de f deslocado horizontalmente, no sentido positivo, c unidades.

Reflexões

O gráfico de $g(x) = -f(x)$ é o gráfico de f, reflectido em relação ao eixo dos xx.

O gráfico de $g(x) = f(-x)$ é o gráfico de f, reflectido em relação ao eixo dos yy.

Gráficos de Funções Inversas

Graficamente uma função f tem inversa se e somente se o gráfico for cortado, no máximo, uma vez por qualquer recta horizontal. Se f tiver inversa então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação à recta $y = x$ (bissectriz dos quadrantes ímpares).

Funções Elementares

As funções elementares são as funções potências, exponenciais, circulares, hiperbólicas e as suas inversas.

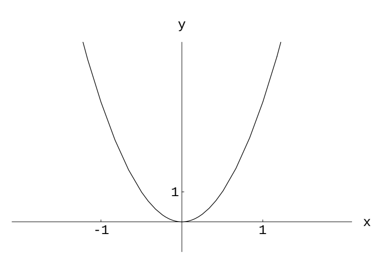
Função Potência de Expoente Natural

Chama-se *Função Potência* a qualquer função da forma

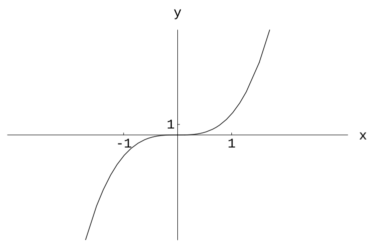
$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow y = x^n, \end{aligned}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Se n é par o gráfico é da forma:



Se n é ímpar o gráfico tem o seguinte aspecto:



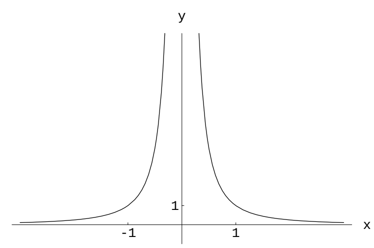
Função Potência de Expoente Negativo

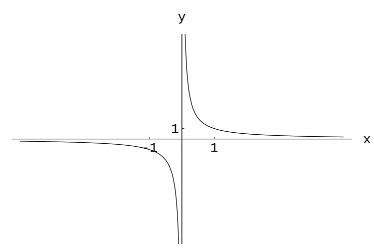
Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} f \;:\; \mathbb{R}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \end{aligned}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Os gráficos da função potência de expoente negativo, para n par e n ímpar, têm os seguintes aspectos.





Funções Raízes

As Funções Raízes são Funções Potências de Expoente Racional. Além disso, também podem ser Funções Inversas das Funções Potências acabadas de estudar.

Função Raiz Índice Par

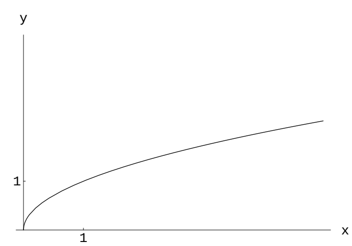
Como a função potência de expoente par não é injectiva no seu domínio, não tem inversa. No entanto, se considerarmos a função restrição da função potência para os valores de $x \geq 0$ esta é injectiva e assim podemos considerar a sua função inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1} \; : \; CD_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow \sqrt[n]{y}, \end{aligned}$$

com n par.

Ora, como o domínio e contradomínio da função potência para $x \geq 0$ é $\mathbb{R}^+$, conclui-se que o domínio e contradomínio da função raiz também é $\mathbb{R}^+$.

Para obter o gráfico desta função basta fazer uma reflexão do gráfico da função potência (considerando apenas os valores se x tais que $x \geq 0$) relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, como mostra a figura.



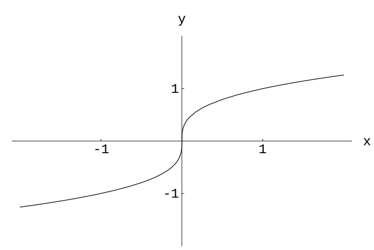
Função Raiz Índice Ímpar

A função potência de expoente ímpar é injectiva. Assim, a função inversa de f existe e tem-se

$$\begin{aligned} f^{-1} \ : \ CD_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow \sqrt[n]{y}, \end{aligned}$$

com n ímpar.

Ora, como o domínio e contradomínio da função potência é $\mathbb{R}$, conclui-se que o domínio e contradomínio da função raiz também é $\mathbb{R}$.



Funções Exponenciais

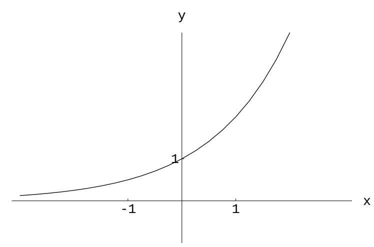
Chama-se *Função Exponencial de base* a a qualquer função da forma

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = a^x, \end{aligned}$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

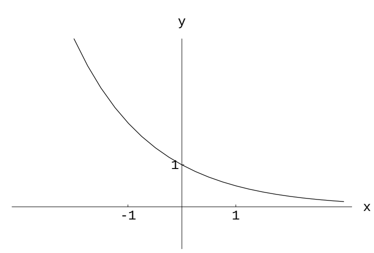
As funções exponenciais têm um de dois aspectos básicos, consoante $0 < a < 1$ ou $a > 1$, como veremos de seguida.

Função Exponencial de base $a > 1$



Se $a = e = 2.7182818284...$, e^x é chamada *Exponencial Natural*.

Função Exponencial de base $0 < a < 1$

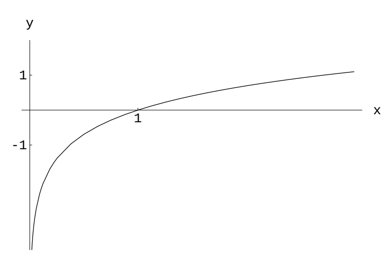


Função Logaritmo de base $a > 1$

A Função Exponencial de base $a > 1$ é injectiva. Assim, a função inversa de f existe e tem-se

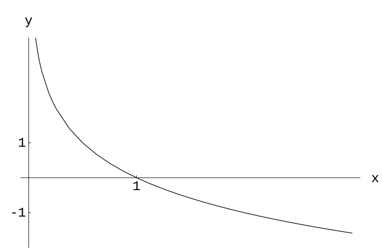
$$\begin{aligned} f^{-1} \;\;:\;\; CD_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow \log_a y. \end{aligned}$$

A esta função dá-se o nome de *Função Logaritmo de base a* . Ora, como o domínio e contradomínio da função exponencial de base a $(a > 1)$ é, respectivamente, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, conclui-se que o domínio e contradomínio da função logaritmo de base a $(a > 1)$ é $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.



Função Logaritmo de base $0 < a < 1$

A Função Exponencial de base $0 < a < 1$ é injectiva com domínio $\mathbb{R}$ e $CD_f =]0, +\infty[$ pelo que podemos considerar a sua função inversa f^{-1}, cujo gráfico é o seguinte.



Funções Circulares Directas

Devido às definições de $\cos x$, $\sin x$ e $\tan x$, apresentadas podemos considerar as seguintes funções:

$$\begin{aligned} f_1 \quad : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \quad : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sin x, \end{aligned}$$

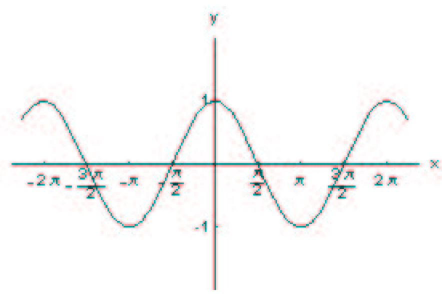
$$\begin{aligned} f_3 \quad : \quad \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \qquad\qquad &\longrightarrow \quad \tan x, \end{aligned}$$

que se chamam *Funções Circulares*.

Função Co-seno

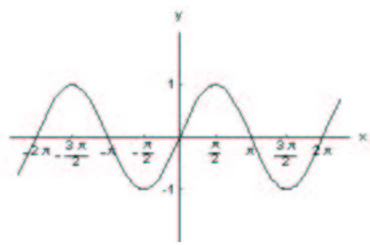
A função co-seno é periódica de período 2π, o que significa que o seu comportamento se repete em sucessivos intervalos de comprimento 2π.

O gráfico da função f_1 tem a forma seguinte.



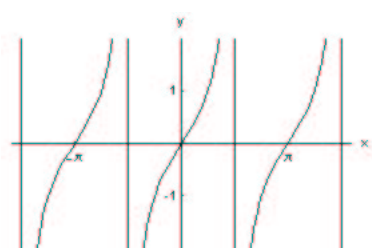
Função Seno

Como $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ então o seu gráfico obtém-se fazendo uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$, no sentido positivo do eixo dos xx, como mostra a figura.



Função Tangente

A função tangente é periódica de período π.



Há ainda a considerar as seguintes Funções Circulares:

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Função Arco Co-seno

Como a função co-seno é uma função periódica, conclui-se que não é injectiva no seu domínio. Assim, a função f_1 não tem inversa. No entanto, se considerarmos a função restrição da função co-seno ao conjunto $A_1 = [0, \pi]$, esta é injectiva e assim podemos considerar a sua função inversa:

$$\begin{array}{rcl} (f_{1|A_1})^{-1} & : & [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \quad y \quad\quad \longrightarrow x = \arccos y. \end{array}$$

A esta função dá-se o nome de *Função Arco Co-seno* . Devido à definição de função inversa tem-se:

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

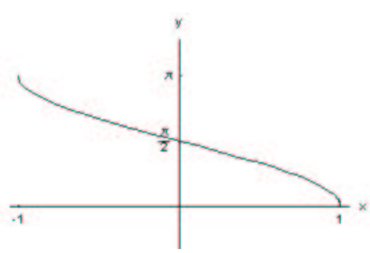
$$(y = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos y)$$

Substituindo o valor de x e de y dados numa das igualdades na outra igualdade, obtém-se:

$$\cos(\arccos y) = y, \quad \text{para} \quad y \in [-1, 1];$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{para} \quad x \in [0, \pi].$$

Para obter o gráfico desta função basta fazer uma reflexão do gráfico da função co-seno (considerando apenas os valores se x tais que $0 \leq x \leq \pi$) relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, como mostra a figura.



Função Arco Seno

À semelhança da função co-seno, a função seno não é injectiva no seu domínio. Se considerarmos a função restrição da função seno ao conjunto $A_2 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, esta é injectiva e assim podemos considerar a sua função inversa:

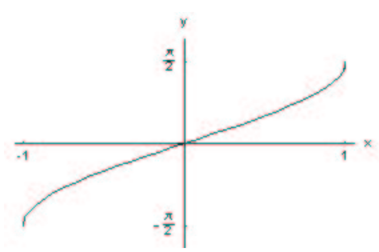
$$\begin{aligned} (f_{2|A_2})^{-1} \;:\; & [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad y \quad\;\; \longrightarrow x = \text{arcsin}\, y. \end{aligned}$$

A esta função dá-se o nome de *Função Arco Seno* . Devido à definição de função inversa tem-se:

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$(y = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin y)$$

Para obter o gráfico desta função basta fazer uma reflexão do gráfico da função seno (considerando apenas os valores se x tais que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, como mostra a figura.



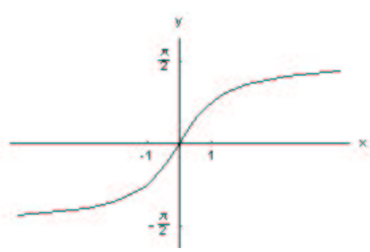
Função Arco Tangente

Da mesma maneira que as funções seno e coseno, a função tangente não é injectiva no seu domínio.

Se considerarmos a função restrição da função tangente ao conjunto $A_3 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, esta é injectiva e assim podemos considerar a sua função inversa:

$$\begin{aligned} (f_{3|A_3})^{-1} \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \ \longrightarrow x = \text{arctan}\, y. \end{aligned}$$

A esta função dá-se o nome de *Função Arco Tangente* . Para obter o gráfico desta função basta fazer uma reflexão do gráfico da função tangente (considerando apenas os valores se x tais que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, como mostra a figura.



Funções Hiperbólicas Directas

Devido às definições de $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ e $\coth x$, apresentadas, podemos introduzir as seguintes funções:

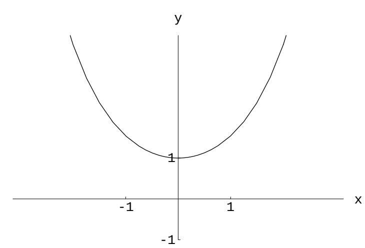
$$\begin{aligned} f_4 \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \longrightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

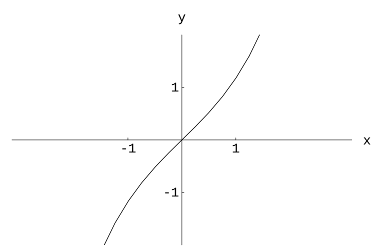
$$\begin{aligned} f_5 \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \longrightarrow \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

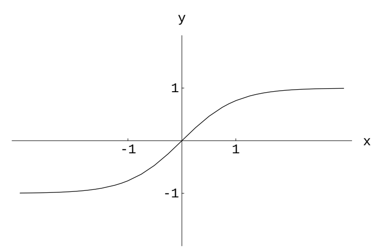
$$\begin{aligned} f_6 \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \longrightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}. \end{aligned}$$

que se chamam *Funções Hiperbólicas Directas*.

Os gráficos das funções hiperbólicas directas são







Há ainda a considerar as seguintes Funções Hiperbólicas:

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \coth x = \frac{1}{\tanh x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \end{aligned}$$

Funções Hiperbólicas Inversas

Função Argumento Co-seno Hiperbólico

A função

$$\begin{aligned} f_5 \ : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \longrightarrow \cosh x \end{aligned}$$

não é injectiva no seu domínio (para o confirmar basta observar o seu gráfico), mas é injectiva em $[0, +\infty[$. Além disso $CD_f = [1, +\infty[$. Assim a sua restrição a $[0, +\infty[$ tem inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} \ : \ & [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \quad \longrightarrow x = \arg\cosh y. \end{aligned}$$

A esta função dá-se o nome de *Função Argumento Co-seno Hiperbólico*. Devido à definição de função inversa tem-se:

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \forall y \in [1, +\infty[$$

$$(y = \cosh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arg\cosh y)$$

e portanto

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \arg\cosh(\cosh x) = x$$

$$\forall y \in [1, +\infty[\quad \cosh(\arg\cosh y) = y.$$

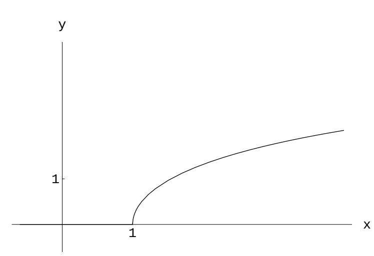
Para $x < 0$, $\cosh x$ existe e tem-se

$$\arg\cosh(\cosh x) = \arg\cosh(\cosh(-x)) = -x.$$

Donde

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arg\cosh(\cosh x) = |x|.$$

Para obter o gráfico desta função basta fazer uma reflexão do gráfico da função Co-seno Hiperbólico (considerando apenas os valores se x tais que $x \in [0, +\infty[$) relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, como mostra a figura.



Função Argumento Seno Hiperbólico

A função

$$\begin{aligned} f_6 \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &\longrightarrow \sinh x \end{aligned}$$

é injectiva em $\mathbb{R}$ e portanto tem inversa (com $CD_f = \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} f^{-1} \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow x = \operatorname{arg}\sinh y. \end{aligned}$$

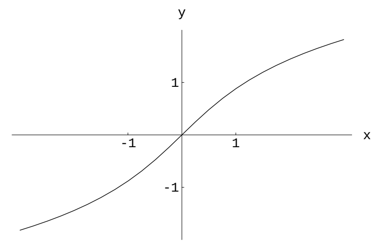
A esta função dá-se o nome de *Função Argumento Seno Hiperbólico*. Devido à definição de função inversa tem-se:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(y = \sinh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arg}\sinh y)$$

e portanto

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{arg}\sinh(\sinh x) = x$, $\sinh(\operatorname{arg}\sinh x) = x$.



Função Argumento Tangente Hiperbólica

A função

$$
\begin{aligned}
f_7 \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longrightarrow \tanh x
\end{aligned}
$$

é injectiva em $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $]-1,1[$. A sua inversa é dada por:

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \quad : \quad &]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\
& y \qquad \longrightarrow x = \arg\tanh y.
\end{aligned}
$$

A esta função dá-se o nome de *Função Argumento Tangente Hiperbólica*. Devido à definição de função inversa tem-se:

$$\forall x \in]-1,1[\quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(y = \tanh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arg\tanh y).$$

Substituindo x pelo seu valor, $\arg\tanh y$, na primeira equação vem

$$\forall y \in]-1,1[\quad \tanh(\arg\tanh y) = y.$$

Fazendo o mesmo com y obtém-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arg\tanh(\tanh x) = x.$$